将1分解成 $\frac{1}{n}$的和形式

15110840001 陈智鹏

October 22, 2015

很早大家就知道，1可以分解成如下形式:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

自然就会想两个问题:
1. 能否将1分解成为互不相同的$\frac{1}{n}$的和形式且n全是奇数呢?
2. 是否存在无穷种多上述分解呢?

当然这些问题早就有人想过了，比如听说魏老师的儿子笔算就能做出来0.0

下面我来回答一下这两个问题，本渣当然笔算不出啦，写了一发C++来暴力跑了一下，然后得到了如下分解算是回答了问题1:

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{45} + \frac{1}{231}$$

上述结果是由程序跑出，并可以证明它的满足1的最短序列.

当然这种分解是不唯一的，我故意要求分解不出现$\frac{1}{3}$跑了一下，可以得到如下结果:

$$1 = \frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{21}+\frac{1}{33}+\frac{1}{35}+\frac{1}{39}+\frac{1}{45}+\frac{1}{49}+\frac{1}{51}+\frac{1}{55}+\frac{1}{65}+\frac{1}{77}+\frac{1}{85}+\frac{1}{54145}$$

下面回答问题2:
假设1可以分解成如下形式:

$$1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$$

其中$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$且x_i为奇数。 那么,我们可以得到

$$1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n})$$

由问题1中的分解，我们就可以按照上述方式产生无穷多种分解方式。这就肯定的回答了问题2。

当然人总是不知满足的，可能还会问下列问题:

3. 限制给定有限个数不出现，是否有问题1成立?
4. 这件事看似是不可能的，为啥这么巧，这些数是否有规律性?

对于问题3，我认为答案是肯定的，虽然我并没有证明它的热忱。

对于问题4，我也并没有发现什么规律，但是有一点可以确定的是，分母最大的一个数必定是不可能是质数，这是句废话0.0

最后我还想说说的是，得到这个分解并非直接暴力那么简单。要知道$2n+1$内的大于1的奇数有n个，任意组合有2^n种，如果不在多方面进行优化，是很难在有限的时间和空间下解决这个问题的。由于该问题并未涉及到矩阵，就选择高效的C++来处理该问题，下面说一下几个优化的地方:

1. 整个运算中不能出现double变量运算，只能用分数运算。
2. 当我们碰到和为 $\frac{q-1}{q}$且$q > n$的项就可以终止程序了(没有这一步优化，这程序根本没法跑）.
3. 如果出现和的分母大于2^{20}次方我们就直接抛弃它，认为它没有产生1的可能（最为关键的一步优化，否则内存根本吃不消）。
4. 如果和超过1，我们就直接把它抛弃。整个过程中，我们维护和数组让其有序，可以降低每一步操作的复杂度。
5. 当程序终止达到$\frac{q-1}{q}$时，再回溯找到该和的序列。

最后，其实这样的分解存在还是很让人意外的，然而貌似并没有什么卵用 0.0